

圆弧浅拱面外动力稳定性实验研究*

李康杰, 刘爱荣, 卢汉文, 禹奇才

(广州大学-淡江大学工程结构灾害与控制联合研究中心, 广东 广州 510006)

摘要: 对称作用于拱结构的周期性荷载, 一般来说, 只引起拱面内的对称振动, 然而在一定的条件下可能引起很大振幅的面内反对称振动以及面外对称振动, 这是拱结构由于参数共振引起的动力失稳问题。本文针对圆弧浅拱平面外动力稳定问题, 基于激振实验, 利用 APS 系列激振器模拟拱顶单点简谐激励, 采用 B&K 测振系统测定圆弧拱横向振动响应, 测得结构自振模态与阻尼比, 通过往返不断扫频方式获得动力不稳定域边界, 并与理论结果进行了对比分析, 探究了其在周期集中荷载作用下的动力侧倾失稳机理, 研究表明: 当外部激励荷载频率约为结构 2 倍自振频率时, 结构出现激烈的横向参数共振, 并且只有外激励幅值大于临界激发力时才会发生参数共振, 而阻尼条件的存在影响着临界激发力的大小, 外激励幅值越大, 参数共振现象越容易发生, 该文验证了圆弧浅拱面外动力不稳定域计算结果的准确性, 研究成果为拱结构的动力稳定设计提供了一定的参考价值。

关键词: 圆弧浅拱; 周期性荷载; 参数共振; 面外动力稳定; 激振实验; 动力不稳定域

中图分类号: TU317 **文献标志码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2015) 03-0030-06

Experimental Study on Out-of-Plane Dynamic Stability of Circular Shallow Arch

Li Kangjie, Liu Airong, Lu Hanwen, Yu Qicai

(Guangzhou University-Tamkang University Engineering Structure Disaster and Control Joint Research Center, Guangzhou University, Guangzhou 510006, China)

Abstract: The periodic load on the arch, in general, only causes the symmetric in-plane vibration of the arch. However, under certain conditions, it can cause in-plane anti-symmetric vibration and out-of-plane symmetric vibration with large amplitude, which is so-called the instability problem of an arch structure due to the parametric resonance. Aimed at studying the out-of-plane dynamic stability problem of circular shallow arch, the experimental work is conducted trying to explore mechanism of the out-of-plane dynamic instability under concentrated periodic load. By applying APS series vibrator, the single point harmonic excitation at vault was simulated. The B&K modal testing system was used to gain the transverse vibration response of circular arch including its vibration mode shape and damping ratio. The boundaries of unstable domain were distinguished by way of constant frequency back-and-forth sweep. The experimental results were compared with those from theory analysis, and the results show that remarkable transverse parameter resonance of the structure appears when the frequency of external excitation is about twice of the structural frequencies. The parameter resonance occurs only when the external excitation amplitude is greater than the critical excitation force. The existence of the damping affects the value of the critical ex-

* 收稿日期: 2014-12-15

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11272095, 51378133)

作者简介: 李康杰 (1989 年生), 男; 研究方向: 新型拱桥的静、动力稳定性; 通讯作者: 刘爱荣; E-mail: liu-a-r@163.com

citation force. The greater is the excitation, the easier does the parameter resonance phenomenon occur. The experimental work reported verifies the accuracy of calculating the out-of-plane dynamic instability domain of the circular shallow arch, and presents that research has reference value for the design of dynamic stability of arch structure.

Key words: circular shallow arch; periodic load; parametric resonance; out-of-plane dynamic stability; vibration experiment; dynamic instability domain

近年来,地震和台风等自然灾害对拱型结构的破坏越来越引起人们的关注。结构失稳时具有和脆性断裂相似的特性,即结构失稳破坏往往突然发生,没有明显的征兆,这种破坏往往会造成大量的人员伤亡和巨大的经济损失。例如,2004年在台风“云娜”作用下,温州大学体育场屋盖结构发生整体失稳破坏;2008年汶川地震,作为钢筋混凝土悬链线双曲拱桥的明月渡涪江大桥和都江堰市的庙坝大桥都由于拱肋发生动力失稳发生全桥垮塌。众所周知,对于面内承受静力荷载的拱结构,当力的大小超过静力屈曲临界荷载时,结构往往会从一个平衡位置跳跃到另一个平衡位置,这是静力分支点失稳现象^[1]。但对受动力作用的拱结构而言,承载力往往还未达到静力屈曲临界荷载时便发生了动力失稳,此时其稳定性由承受的动力荷载与拱的设计参数来控制。

对于拱的动力稳定问题,早在20世纪60年代,学者们就开始进行了研究^[2-7]。其中,符华·鲍络金^[8]对于双铰圆弧拱在周期性荷载作用下的面内动力稳定问题进行了探讨,得到了面内振动动力不稳定域,并通过拱反对称振动的参数激振实验揭示了在正对称荷载作用下拱的振动机理。近些年来,Chen与Yang等^[9]通过理论与实验相结合的手段研究了浅拱在一端承受周期性荷载作用下的非线性动力响应。王连华、易仕鹏等^[10]利用Mathieu-hill方程求解得到Lyapunov指数,对比分析了几何缺陷拱与理想拱的动力稳定性能,研究了周期荷载作用频率与几何缺陷大小对拱动力稳定性能的影响。赵洪金、刘超^[11]基于能量法推导出以位移为基本未知量的圆弧深拱总势能,从Hamilton原理出发,建立了考虑剪切变形的圆弧深拱的动力稳定微分方程。

尽管周期性载作用下圆弧拱的动力稳定问题早已受到广泛关注,然而目前研究多数集中于平面内动力稳定,其参数共振的形式为反对称形式。而对于拱平面外动力问题目前的研究多数针对平面外自由振动或强迫振动响应分析^[12-16],因圆弧拱的平面外动力稳定问题是三维多自由度复杂动力问题,

现阶段只针对荷载形式为较为简单的径向均布力的情况进行了初步研究^[17-18],而对于集中力及集中质量问题尚未解决,并且只限于理论上推导,尚未通过实验去验证,在本文中,这些问题得到了解决。

本文通过激振实验探究了圆弧浅拱在周期简谐集中荷载作用下平面外参数共振问题,利用激振器模拟了拱顶周期性集中动载,测定了结构自振频率与阻尼比,通过扫频方式获得稳定域与不稳定域边界,结果表明当外部荷载激励频率约为结构自振频率的2倍时,拱结构发生激励的侧向参数共振,并且不稳定域与激振力的幅值、激发频率以及自振频率有关,临界激发系数受阻尼条件的影响较大。

1 实验模型与设备

圆弧拱模型的矢跨比为1/7,跨径为173 cm,拱截面采用实心圆截面,直径为1 cm,材料为A3钢,拱脚通过螺栓固定于反力架上。鉴于实际工程中常见的受力形式为自上向下作用于拱上,例如拱顶受汽车振动作用的上承式拱桥,受海水周期性冲击作用的圆弧闸门等。本实验自行设计了激振器的激振头,可以传递向下周期冲击作用力,如图1所示。本实验在拱顶设置了5.1 kg配重,配重的作用其一是模拟了集中质量调整结构的频率和临界荷载;其二是增加非线性惯性作用使得非线性振动现象更加明显;其三是寻找随配重规律性变化的实验结果。



图1 实验拱结构现场布置

Fig. 1 Site layout of structure under test

本试验采用德国 APS 动力激振系统进行结构振动测试, 采用丹麦 B&K 振动测量系统进行振动数据的收集和分析。APS 激振系统作为长冲程、宽频域激振系统, 可模拟正弦荷载、冲击荷载、随机荷载多种激励且有多种操作模式。本实验利用 APS113 激振器的传力杆模式模拟集中正弦荷载, 最大激振力幅值为 133 N, 通过激振系统扫频功能可输出频率变化的周期性荷载。B&K 动力测量系统作为高精度测量系统, 可进行加速度、速度、位移的测量, 并进行时域、频域、模态分析。利用时域曲线记录拱模型振动状态, 根据幅值与频率变化情况对失稳状态进行判定。此外, 采用 B&K 测量系统自带的 OMA 分析功能进行自振模态以及阻尼比的测定。

2 自振模态与阻尼比测定

为测定结构振动的模态与阻尼比, 在拱的四分之一位置以及拱顶设置加速度传感器, 因传感器质量远小于拱模型自身质量, 故传感器质量的影响忽略不计, 并且通过多次测量求平均方式减小误差。利用“锤击法”可得到自由振动曲线, 见图 2。根据所测自由振动曲线, 利用自由衰减法计算阻尼比^[19]。下式为阻尼衰减率:

$$\delta = \frac{1}{n} \ln \left(\frac{x_i}{x_{i+n}} \right) = \xi \omega T \quad (1)$$

其中, ξ 表示阻尼比, ω 表示圆频率, T 表示周期。

利用 ANSYS 进行圆弧单拱建模, 将单拱划分

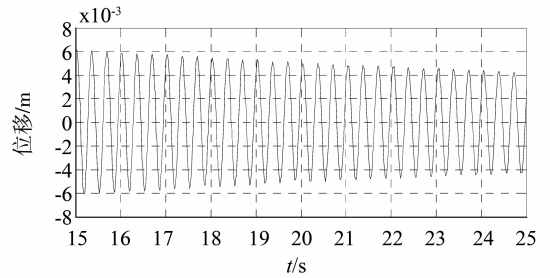


图 2 自由振动曲线

Fig. 2 Free vibration curve

120 个 BEAM 单元, 采用固结边界条件。根据有限元计算的自振模态以及自由衰减法计算得到的阻尼比与测振系统所得实验值进行了误差对比^[20], 其中自振模态测试对比结果见表 1, 阻尼比测试对比结果见表 2。从表 1、表 2 可以看出, 实验中通过测振系统所测到的自振频率和阻尼比与有限元和解析法所得结果误差较小, 其中自振频率误差范围为 6.7% ~ 9.9%, 阻尼比误差范围为 2.3% ~ 4.6%, 故测振系统的 OMA 分析测试拱结构的自振频率及阻尼比具有相当的准确性, 其结果可适用于动力不稳定域的计算。

3 扫频获取不稳定域边界

在激发力为: $P(t) = a_0 P_{cr} + \beta P_{cr} \varphi(t)$ 的激振力作用下, 其动力不稳定域可由 Mathieu 方程^[8]

$$\{\ddot{g}\} + 2\zeta\{\dot{g}\} + [\Omega^2]([\mathbf{I}] - 2\mu\varphi(t))\{g\} = 0 \quad (2)$$

表 1 自振模态测试结果

Table 1 Test results of vibration modes

分析方法	项目	第一次	第二次	第三次	平均
有限元法	自振频率	3.32	3.32	3.32	3.32
	理论一阶振型	面外侧倾	面外侧倾	面外侧倾	/
OMA 分析	自振频率	3.097	2.991	3.062	3.050
	实测一阶振型	面外侧倾	面外侧倾	面外侧倾	面外侧倾
误差/%	/	6.7	9.9	7.8	8.1

表 2 阻尼测试结果

Table 2 Test results of damping ratio

分析方法	项目	第一次	第二次	第三次	平均
自由衰减法	阻尼衰减率	0.025 9	0.023 8	0.026 2	0.025 3
	阻尼比/%	0.412 4	0.379 0	0.417 2	0.402 9
OMA 分析	阻尼衰减率	0.026 6	0.024 9	0.026 8	0.026 1
	阻尼比/%	0.423 6	0.396 5	0.426 8	0.415 6
误差/%	/	2.7	4.6	2.3	3.2

来确定，其中， ζ 表示阻尼系数， $\zeta = \xi\omega$ ； g 表示侧向位移； Ω 表示考虑竖向力定值分量作用下单拱侧向固有振动圆频率； μ 表示激发系数：

$$\mu = P_t / (2P_{cr} - 2P_0) \quad (3)$$

只有当激发系数 μ 大于临界激发系数 μ^* 时，才会发生参数共振的情况^[8]，其中，临界激发系数表示为

$$\mu^* = \sqrt[k]{\delta/\pi} \quad (k = 1, 2, 3, \dots \text{阶}) \quad (4)$$

本实验模型临界激发系数算得为 0.008 3。 P_{cr} 表示静力临界屈曲荷载，实验模型采用其有限元计算值，为 617 N。

从理论出发可知主要参数共振区域落 $\theta = 2f_\omega$ 附近，取 ± 0.5 Hz 的范围进行顺时针和逆时针扫频往返扫频，速度为 0.500 Hz/min，基于安全性的考虑，设定最大激振力为 100 N，通过设定百分比控制输出激振力大小。根据符华·鲍洛金^[8]对参数共振发生过程的描述，当强迫振动的暂态与参数共振状态发生过渡时，结构的振动状态会发生突变，包括幅值的突变及振动形态的突变。观察及测量扫频过程中的横向振动情况，若出现振动幅值突增突减或出现由杂乱无章的强迫暂态振动转变为有

规律的定态振动或跳动现象时，将突变频率记录下来。如图 3 所示为控制力为 10%、40%、70%（即对应激发系数分别为 0.008 1、0.032 4、0.056 7）在频率 5.6 ~ 6.6 Hz 范围内扫频响应图。

如图 3 所示，从扫频图可以看出参数共振的规律。当激发力比临界激发力小时，因阻尼力的存在，在 2 倍自振频率附近不会出现振幅突增现象，即未发生参数共振（见图 3a、3b）。当激发力大于临界激发力，且激发力大小适中，激发频率未进入不稳定域之前，振动幅值较小，而进入不稳定域后，振动幅值会发生突增，其振动频率与自振频率一致，并且对比顺时针与逆时针扫频情况，逆时针扫频振动幅值突变现象更为明显，随着激发频率跃出不稳定域，振动幅值会突减（见图 3c、3d）。当激振力较大，不稳定域内除了幅值的突增，还会伴随幅值跳动状态的出现，在不稳定域之外由于较大冲击力作用也会发生大幅值的情况，但因其振动状态是杂乱的，且其振动频率与外激励频率一致，而参数共振振动周期为外激励的两倍^[8]，振动带有规律性，故判断其不属于参数共振（见图 3e 和图 3f）。

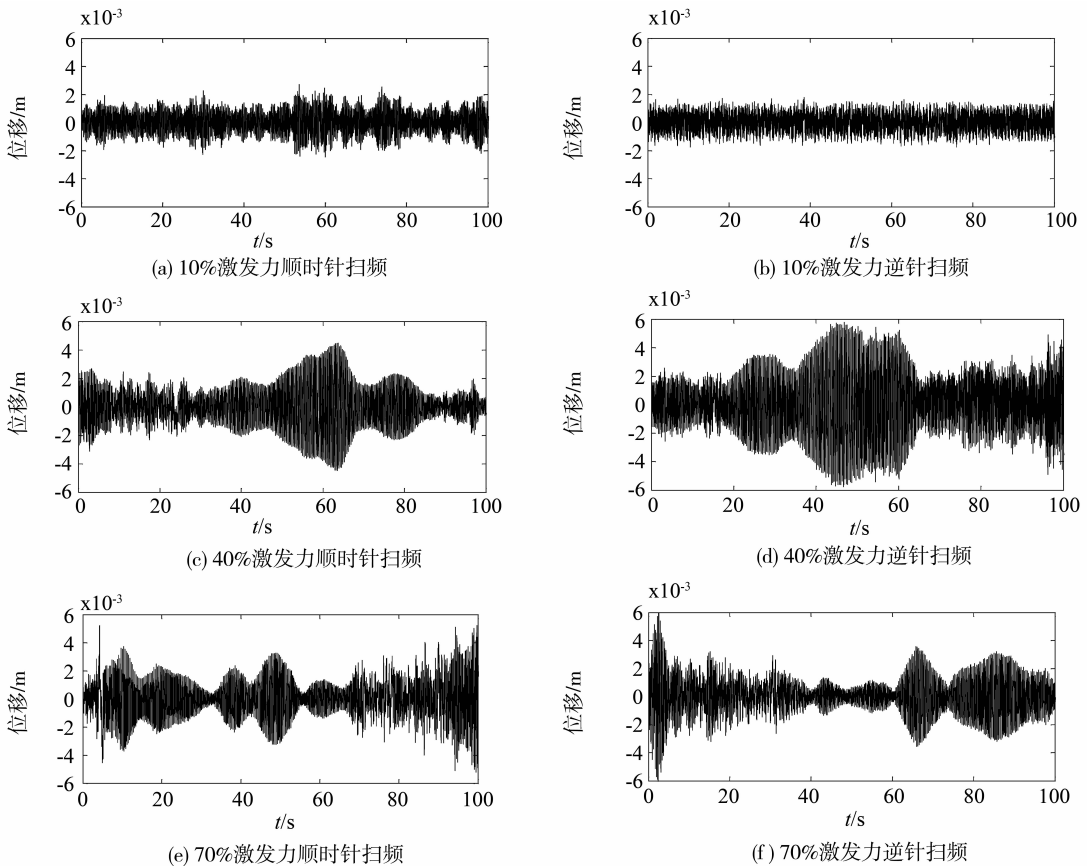


图 3 10%、40%、70% 激发力下扫频图

Fig. 3 Frequency sweep back and forth under 10% , 40% , 70% exciting force

调整激发力的大小 (最大的控制力为 100 N 的 10% ~ 80%), 将各激发力下发生振动状态突变的频率值记录下来, 临界激发频率上下界分别记为 f_{ω_1} 和 f_{ω_2} , 并描绘在理论动力不稳定域上, 经过多次扫频区别出不稳定域的边界, 如表 3 所示为理论域边界与实测边界对比, 如图 4 所示为不稳定域对比。从图 4、表 3 可以看出, 不稳定边界点落在 2 倍自振频率附近, 并且在激发力小于阻尼条件决定的临界激发力时, 如 10% 激发力及以下没有参数共振点; 超过临界激发力后, 出现了参数共振点, 并且激发力越大, 发生参数共振的频率范围越大。从误差分析可以看出实验动力不稳定域上下边界与

理论动力不稳定域具有较好的拟合, 故而本实验验证了动力不稳定域理论的正确性。

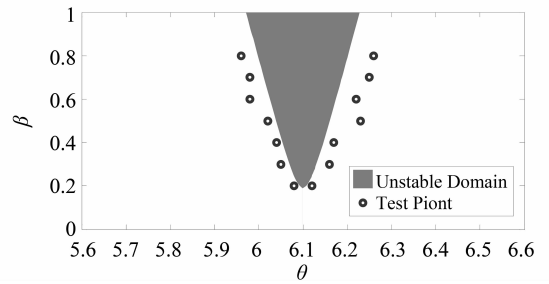


图 4 动力不稳定域理论与实验对比图

Fig. 4 Comparison between theoretic and experimental dynamic instability domain

表 3 理论域边界与实测边界对比

Table 3 Comparison with the measured boundary and theoretic boundary

激振力大小		30%	40%	50%	60%	70%	80%
上界频率	理论值/Hz	6.13	6.15	6.17	6.18	6.19	6.21
	实验值/Hz	6.16	6.17	6.23	6.22	6.25	6.26
	误差/%	0.49	0.33	0.97	0.64	0.97	0.81
下界频率	理论值/Hz	6.06	6.05	6.03	6.02	6.01	5.99
	实验值/Hz	6.05	6.04	6.02	5.98	5.98	5.96
	误差/%	0.17	0.17	0.33	0.66	0.50	0.50

4 结 论

基于周期性集中荷载作用下圆弧浅拱面外动力稳定的激振实验研究, 可得出以下结论:

1) 通过“锤击法”能较好测定圆弧单拱的横向自振固有频率和阻尼比, 通过 OMA 分析测得的自振频率和阻尼比与用有限元法算出的自振频率和通过自由衰减法算出的阻尼比误差在 10% 以内, 误差较小。

2) APS 激振系统模拟周期性集中荷载具有相当的适用性, 本实验自行设计的激振头可成功地用于模型实验中, 解决了 APS 激振器产生力方向的局限, 将激振器向上激振的方式成功地改造成向下激振的方式, 并具有相当的精度。

3) 通过往返扫频方法获得动力不稳定域边界, 实验实测动力不稳定边界域边界与通过解析法求得的不稳定边界基本吻合, 故理论计算所得不稳定域的正确性得到了验证。实验证明了动力不稳定域落在 2 倍自振频率附近, 并且只有当激发力大于临界激发力时才会发生参数共振, 而临界激发频率与激发力的大小有关, 激发力越大激发频率范围越大。

参考文献:

- [1] 禹奇才, 刘爱荣, 肖才涛, 等. 基于尖点突变理论的平行组拼双肋拱侧倾失稳临界荷载计算新方法[J]. 中山大学学报: 自然科学版, 2014, 53 (2): 6-11.
- [2] HUMPHREYS J S. On dynamic snap buckling of shallow arches [J]. AIAA Journal, 1966, 4: 878-886.
- [3] HUMPHREYS J S. Experiments on dynamic plastic deformation of shallow circular arches [J]. AIAA Journal, 1966, 4: 926-928.
- [4] HSU C S. Stability of shallow arches against snap-through under time wise step loads [J]. Journal of Applied Mechanics, 1968, 35 (1): 31-39.
- [5] GREGORY W E, PLAUT R H. Dynamic stability boundaries for shallow arches [J]. Journal of the Engineering Mechanics Division ASCE, 1982, 108 (EM6): 1036-1050.
- [6] DONALDSON M T, PLAUT R H. Dynamic stability boundaries of a sinusoidal shallow arch under pulse loads [J]. AIAA Journal, 1983, 21 (3): 469-471.
- [7] KOUNADIS A N, RAFTOYIANNIS J, MALLIS J. Dynamic buckling of an arch model under impact loading [J]. Journal of Sound and Vibration, 1989, 134 (2): 193-

- 202.
- [8] 符华·鲍洛金. 弹性体系的动力稳定性[M]. 北京: 高等教育出版社, 1960.
- [9] CHEN J S, YANG C H. Experiment and theory on the nonlinear vibration of a shallow arch under harmonic excitation at the end [J]. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 2005, 74 (6): 1061 – 1070.
- [10] 王连华, 易壮鹏, 张辉. 周期荷载作用下几何缺陷拱的动力稳定性 [J]. *湖南大学学报*, 2007, 34: 16 – 19.
- [11] 赵洪金, 刘超. 考虑剪切变形的圆弧深拱参数共振稳定性分析 [J]. *振动与冲击*, 2012, 31: 119 – 122.
- [12] IRIE T, YAMADA G. Natural frequencies of out-of-plane vibration of arches [J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1982, 49: 910 – 913.
- [13] SILVA J M M E, URGUEIRA A P V. Out-of-plane dynamic response of curved beams—An analytical model [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1988, 2: 271 – 284.
- [14] KAWAKAMI M, SAKIYAMA T, MATSUDA H, et al. In-plane and out-of-plane free vibrations of curved beams with variable sections [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1995, 187: 381 – 401.
- [15] HUANG C S, TSENG Y P. Out-of-plane dynamic responses of non-circular curved beams by numerical Laplace transform [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1998, 215 (3): 407 – 424.
- [16] LEE S Y, CHAO J C. Out-of-plane vibrations of curved non-uniform beams of constant radius [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2000, 238 (3): 443 – 458.
- [17] 董宁娟, 赵洪金. 开口薄壁截面圆弧拱空间动力稳定性分析 [J]. *科学技术与工程*, 2012, 12: 8569 – 8573.
- [18] 董宁娟, 赵洪金. 闭口薄壁截面圆弧拱空间动力稳定性分析 [J]. *噪声与振动控制*, 2013, 2: 23 – 26.
- [19] R·克拉夫, J·彭津. 结构动力学[M]. 2版. 北京: 高等教育出版社, 2006.
- [20] 卢汉文. 基于 Mathieu-Hill 系统的拱结构动力稳定研究[D]. 广州: 广州大学, 2015.

(上接第 29 页)

- [3] LEONTARITIS I J, BILLINGS S A. Input-output parametric models for nonlinear systems, Part 1: Deterministic nonlinear systems [J]. *Int J Contr*, 2009, 49 (2): 303 – 344.
- [4] 任爱红. 模糊随机过程函数列均方差一致 Henstock 积分的可积性 [J]. *中山大学学报: 自然科学版*, 2010, 51 (4): 41 – 44.
- [5] HONG Z. Algebraic feature extraction of image for recognition [J]. *Patt Recog*, 2007, 24 (2): 211 – 219.
- [6] 杨文光. 权值直接确定的三角形模糊前向神经网络 [J]. *中山大学学报: 自然科学版*, 2013, 52 (2): 33 – 37.
- [7] BRUNELLI R, POGGIO T. Face recognition: features versus templates [J]. *IEEE Trans Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2013, 35 (10): 1042 – 1053.
- [8] LEE C C. Fuzzy logic in controller part I, II [J]. *IEEE Trans Syst Man and Cybern*, 2010, 40: 404 – 436.
- [9] SUGENO M, KANG G T. Structure identification of fuzzy model [J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2008, 38: 15 – 23.
- [10] TAKAGI T, SUGENO M. NN-driver fuzzy reasoning [J]. *Int J Approximate Reasoning*, 2011, 15: 191 – 212.
- [11] CHO K B, WANG B H. Radial basis function based adaptive fuzzy systems and their applications to system identification and prediction [J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2012, 83: 325 – 339.
- [12] CHAO C T, CHEN Y J, Teng C C. Simplification of fuzzy neural systems using similarity analysis [J]. *IEEE Trans Syst, Man, Cybern, Part B: Cybern*, 2013, 35 (2): 344 – 354.
- [13] WANG L X. Adaptive fuzzy systems and control: Design and stability analysis [M]. Prentice-Hall: Englewood Cliffs, NJ, 2011.
- [14] JANG J S R. ANFIS: Adaptive-network-based fuzzy inference system [J]. *IEEE Trans Syst, Man, Cybern*, 2013, 33 (3): 665–684.
- [15] CHEN S, COWAN C F N, GRANT P M. Orthogonal least squares algorithm for radial basis function network [J]. *IEEE Trans Neural Networks*, 2011, 20: 302 – 310.
- [16] 尹华, 胡玉平. 基于随机森林的不平衡特征选择算法 [J]. *中山大学学报: 自然科学版*, 2014, 53 (5): 59 – 65.